

## Linearkombinationen von Vektoren

Ansatz:  $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

Beispiele:

1 Ermitteln Sie, ob der Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dargestellt werden kann.}$$

2 Ermitteln Sie, ob der Vektor  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dargestellt werden kann.}$$

3 Prüfen Sie, ob es  $t \in \mathbb{R}$  gibt, dass der Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  eine Linearkombination der

$$\text{Vektoren } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Lösungen:

1

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(I)  $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

(II)  $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$

(III)  $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 4$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(II)} - \text{(III)}} \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

(III)  $\Rightarrow \lambda_3 = -1$

(II)  $\Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 2$

(I)  $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

$\Rightarrow$  das LGS ist eindeutig lösbar, d.h. der Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  kann als

Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(I)  $-\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$

(II)  $\lambda_1 + \lambda_3 = -1$

(III)  $\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 2$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -3 & 3 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  das LGS ist unlösbar, d.h. der Vektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  kann nicht als

Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  dargestellt werden

3

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I)  $\lambda_1 + (t-1)\lambda_2 + t\lambda_3 = 1$

(II)  $\lambda_2 + t\lambda_3 = 1$

(III)  $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t & | & 1 \\ 0 & 1 & t & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t & | & 1 \\ 0 & 1 & t & | & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & | & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  für  $t \neq 1$  lässt sich der Vektor  $\vec{x}$  als Linearkombination  
 der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  darstellen